SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Alberto Parmeggiani

PROPAGAZIONE DELLA REGOLARITA' PER SISTEMI DEL TIPO MAXWELL-KLEIN-GORDON

23 gennaio 1992

1.Perche' studiare la propagazione della regolarita'.

Consideriamo l'esempio

$$\Box u + p(u) = 0 \tag{1.1}$$

con $u \in H^s_{loc}(\mathbf{R}^{1+n})$, p un polinomio, $p(0) = 0$, $s > \frac{n+1}{2}$.

Allora $p(u) \in H^s_{loc}(\mathbf{R}^{n+1})$, come e' ben noto.

Consideriamo v, soluzione del problema

$$\begin{cases} \Box v = p(u) \\ v_{|t=0} = \partial_t v_{|t=0} = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

allora

$$v \in C(\mathbf{R}, H^{s+1}_{loc}(\mathbf{R}^n)) \cap C^1(\mathbf{R}, H^s_{loc}(\mathbf{R}^n)) \cap H^{s+1}_{loc}(\mathbf{R}^{1+n}).$$

Se w e' soluzione di

$$\begin{cases} \Box w = 0 \\ (w-u)_{|t=0} = \partial_t (w-u)_{|t=0} = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

si ha che $u = v + w$ percio'

Th. *(Rauch,[8]). Se u e' soluzione di (1.1) e w soluzione di (1.3) allora $u - w = v \in H^{s+1}_{loc}(\mathbf{R}^{1+n})$.*

Il teorema esprime cioe' che le singolarita' di u sono regolate dal problema di Cauchy lineare con le stesse condizioni iniziali, **modulo** H^{s+1}.

D'altra parte singsupp$u$ $\supset$singsupp$w$ nel futuro (i.e. $t > 0$ dove t e' la funzione tempo per $\Box$ o per $p_m(x, D)$ piu' in generale, dove p_m e' supposto essere strettamente iperbolico), come e' stato provato in Rauch-Reed [9], Lascar [6], Beals [1]-[2]. Queste singolarita' sono comunemente chiamate "singolarita' anomale". Esse sono dovute "moralmente" a due fatti: alla posizione del WF per un prodotto (ricordiamolo brevemente: se Γ_1, Γ_2 sono due sottoinsiemi conici chiusi di $T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$ tali che $WF(u_i) \subset \Gamma_i$, $i = 1,2$ ed $u_1 u_2$ e' definita, quindi se $WF(u_1) \cap WF'(u_2) = \emptyset$, allora

$$WF(u_1 u_2) \subset (\Gamma_1 + \Gamma_2) \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad)$$

ed alla geometria di char(p).

Inoltre esse si formano a causa di due fenomeni:

(i) possono essere dovute all'intersezione di due caratteristiche che trasportano una singolarita' (ci riferiamo qui a caratteristiche e bicaratteristiche per il problema lineare); le singolarita' nonlineari possono allora propagarsi lungo tutte le caratteristiche in avanti che scaturiscono dal punto d'intersezione suddetto.

(ii)Per $n \geq 2$, se $\Gamma = \{(t(s), x(s))\}$ e' una caratteristica che e' la $x-$proiezione di due bicaratteristiche nulle $\Gamma_{\pm} = \{((t(s), x(s)); \pm(\tau(s), \xi(s)))\}$, e se la corrispondente w e' tale che $WF(w) \supset \Gamma_{+} \cup \Gamma_{-}$, allora le singolarita' nonlineari possono "auto-indursi" e propagarsi da Γ lungo tutte le possibili caratteristiche (possono cioe' riempire la "lacuna" data, nel caso di $\Box$, dall'interno del cono di luce futuro).

(Le costruzioni sono fatte principalmente cosi':

si considera u soluzione di $\Box u = \beta u^3$, $\beta \in C_0^{\infty}$ opportuna e si scrive

$$u = w + E\beta w^3 + E\beta(u^3 - w^3)$$

dove $\Box w = 0$ e E e' la soluzione fondamentale "forward" per $\Box$.

Si esamina quindi la singolarita' data da βw^3 e propagata da E, e la singolarita' di $E\beta(u^3 - w^3)$, piu' debole di quella di $E\beta w^3$ se i dati iniziali per w (e quindi per u) vengono scelti opportunamente.

Piu' precisamente si costruisce w con $WF(w^3) \not\subset WF(w)$ al tempo $t = 0$ tale che per $t > 0$ $E\beta w^3$ abbia singolarita' non presenti in w, che siano microlocalmente in H^{3s-n+2} ma non in $H^{3s-n+2+\varepsilon}$ e se $E\beta(u^3 - w^3)$ presenta nuove singolarita', queste sono in $H^{3s-n+\frac{5}{2}}$. L'idea per costruire w e' la seguente.

Se $\Box w = 0$, sia

$$K = \{(\tau, \xi) \in \pi_{(\tau,\xi)}(WF(w))\} \subset \pi_{(\tau,\xi)}(\mathrm{char}(\Box)) = \{|\tau| = |\xi|\}.$$

Se K e' un cono proprio, le singolarita' di w^2 sono contenute in $\overline{K + K}$, d'altra parte $\overline{K + K} \cap \mathrm{S}^{n-1}$ e' composto di archi di cerchio massimo cosicche' char($\Box$) $\cap\, \mathrm{S}^{n-1}$ non contiene nuove direzioni singolari.

Facendo pero' w^3 si ottengono direzioni singolari contenute in $B = \overline{K + K + K}$. Si ha cosi' una regione $D = B \cap \mathrm{S}^{n-1}$ delimitata dagli archi di $\overline{K + K} \cap \mathrm{S}^{n-1}$ e $D \cap \mathrm{char}(\Box)$ ci da' le direzioni propagate in avanti da E.) .

Queste singolarita' anomale sono sempre piu' regolari delle singolarita' lineari che le inducono; per $u \in H^s_{loc}(\mathbf{R}^{1+n})$ esse sono sempre moralmente in $H^{2s-\frac{n+1}{2}}_{loc}$. (Rauch [8], Bony [4]).

Rauch e Reed hanno provato che se l'ordine dell'equazione e' piu' grande di 2, e $n \geq 1$, questi tipi di singolarita' di fatto esistono, costruendo un esempio per

$$p_3 = \partial_t(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x),$$

e sono dovute a fenomeni di tipo (i).
Se l'ordine e' 2 ed $n = 1$, per un'equazione semilineare, non ci sono singolarita' anomale.
Per $n \geq 2$ c'e' stabilita' per certi tipi di soluzioni, dette conormali, striate e "angolarmente regolari"; ma in generale appariranno singolarita' di forza $2s - \frac{n+1}{2}$, per ordini > 2.

Se l'ordine e' 2, anche per $n > 1$, Beals ha provato che la forza delle singolarita' anomale e' di tipo $3s - n$, in entrambi i casi (i) e (ii) (questo nel caso di $\Box$ ed in generale per $p_2(x, D)$, operatore strettamente iperbolico, per equazioni di tipo

$$p_2(x, D)u = f(x, J^1 u), \quad J^1 u = (u, Du);$$

per esempio Hörmander [5]).
E' importante notare che il "$3s$" e' valido solo per operatori differenziali e non pseudodifferenziali (per cui vale pero' il "$2s$"); la convessita' di char(p_2), per $p_2 \in \mathrm{Diff}_2(\mathbf{R}^{1+n})$, e' infatti cruciale.
Atiyah-Bott-Gårding hanno dato esempi di operatori (iperbolici) di ordine 4 per cui i fogli di char(p_4) non sono convessi (d'altra parte hanno anche dimostrato che il foglio piu' interno (per p_4 strettamente iperbolico) e' sempre convesso).
Questo e' un fatto importante quando si studiano sistemi di equazioni (in quanto ha importanza l'equazione indotta dal determinante del sistema).

Def. *$u \in H^s_{ml}(x_0, \xi_0)$ se e soltanto se*

$$\exists \varphi \in C_0^\infty, \quad \varphi(x_0) = 1, \quad \Gamma \text{ cono di } \mathbf{R}^n \setminus 0, \ \xi_0 \in \Gamma$$

tale che

$$\langle \xi \rangle^s \chi_\Gamma(\xi) \widehat{\varphi u}(\xi) \in L^2.$$

Il problema della propagazione della regolarita' consiste quindi nella cosa seguente: se u, appartenente ad un opportuno spazio di Sobolev, e' soluzione di un'equazione (sistema) semilineare (o quasilineare o nonlineare) iperbolico (e si supporra' sempre strettamente iperbolico) e si hanno informazioni di maggiore regolarita' Sobolev microlocale in punto di $T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$ che e' caratteristico per la parte lineare, allora lo stesso sara' vero per tutta la bicaratteristica nulla per quel dato punto. Se γ e' tale bicaratteristica, diremo che $u \in H^s_{ml}(\gamma)$ se e solo se

$$u \in H^s_{ml}(x_0, \xi_0), \ \forall (x_0, \xi_0) \in \gamma.$$

Enunciamo ora un teorema di propagazione lineare che e' alla base anche della propagazione delle singolarita' non lineari:

Th. *(Hörmander). Sia $p(x, D) \in \mathrm{Diff}_m(\mathbf{R}^n)$, p strettamente iperbolico. Sia $\gamma_0 = (x_0, \xi_0) \in T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$, $p_m(\gamma_0) = 0$ e Γ la bicaratteristica nulla per γ_0 relativa a $p_m(x, \xi)$. Se u e' tale che $p(x, D)u = f(x)$, con $f \in H^{s-m+1}_{ml}(\Gamma)$ e $u \in H^s_{ml}(\gamma_0)$, allora $u \in H^s_{ml}(\Gamma)$.*

E' anche chiaro che le proprieta' di algebra degli spazi funzionali sotto considerazione sono fondamentali.
Vale il seguente teorema di Rauch (comunemente chiamato **Lemma** di Rauch):

Th. *(Rauch, [8]). Sia $\frac{n}{2} < s \leq r < 2s - \frac{n}{2}$, Γ un sottoinsieme conico chiuso di $T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$. Allora $H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(\Gamma)$ e' un'algebra.*

Bony, tramite il calcolo paradifferenziale, ha provato che tali spazi sono invarianti per l'azione di funzioni C^∞ e Meyer ha provato che $r = 2s - \frac{n}{2}$ e' permesso.
Per quanto detto sopra, noi ci limiteremo pero' a considerare solo il caso $r < 2s - \frac{n}{2}$.
C'e' anche da dire che Bony ha usato la tecnica paradifferenziale per dimostrare i teoremi di propagazione della regolarita' ([4]). In [3], [7], [8] viene invece utilizzata la piu' semplice tecnica del calcolo pseudodifferenziale (per equazioni pero' semilineari. Beals e Reed hanno poi esteso le tecniche di [3] ad equazioni quasilineari).

2. Alcune osservazioni nel caso dei sistemi di equazioni (strettamente iperbolici).

Consideriamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \Box_1 u = f(x,u,v) \\ \Box_2 v = g(x,u,v) \end{cases} \tag{2.1}$$

dove $f, g \in C^\infty$; $\Box_i$, $i = 1, 2$ sono operatori delle onde in $\mathbf{R}^n$ con differenti "velocita' della luce".
Sia

$$u \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(x_0, \xi_0^1),\ v \in H^s_{loc},\ \frac{n}{2} < s \le r < 2s - \frac{n}{2}.$$

Qui $(x_0, \xi_0^1) \in \mathrm{char}(\Box_1) \subset T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$.
Si ha:

Proposizione. $v \in H^r_{ml}(x_0, \xi_0^1)$.

Th. *Si consideri (2.1). Sia* $\frac{n}{2} < s \le r < 2s - \frac{n}{2}$ *e*

$$u \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(x_0, \xi_0^1),\ v \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(x_0, \xi_0^2)$$

dove $(x_0, \xi_0^i) \in \Gamma_i$ *bicaratteristica nulla di* $\Box_i$; $i = 1, 2$. *Allora*

$$u, v \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(\Gamma_1) \cap H^r_{ml}(\Gamma_2).$$

Per completezza diamo la dimostrazione di questi fatti; queste osservazioni sembrano infatti non essere state esplicitamente enunciate nella letteratura su questo tipo di problemi.

Dim.(della Prop.) $u, v \in H^s_{loc} \Longrightarrow g(x,u,v) \in H^s_{loc}$. L'elliticita' microlocale di $\Box_2$ a (x_0, ξ_0^1) permette quindi di concludere che $v \in H^s_{loc} \cap H^{s+2}_{ml}(x_0, \xi_0^1)$.

Se allora $s + 2 \le r$ si ha che $u, v \in H^s_{loc} \cap H^{s+2}_{ml}(x_0, \xi_0^1)$.
Iterando questo argomento di bootstrap si ha:

$$v \in H^s_{loc} \cap H^{s+2k}_{ml}(x_0, \xi_0^1),\ s + 2k \le r \Longrightarrow g \in H^s_{loc} \cap H^{s+2k}_{ml}(x_0, \xi_0^1)$$

$$\Longrightarrow v \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(x_0, \xi_0^1). \bullet$$

Dim.(del Th.) Consideriamo l'operatore *det* per (2.1):

$$\Box_1\Box_2 u = \Box_2 f(x,u,v) = F(x,u,v) \tag{2.2}$$

$$\Box_1\Box_2 v = \Box_1 g(x,u,v) = G(x,u,v). \tag{2.3}$$

La proposizione allora garantisce che

$$u, v \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(x_0, \xi_0^1) \cap H^r_{ml}(x_0, \xi_0^2)$$

e si ha anche che

$$f, g \in H^s_{loc} \Longrightarrow F, G \in H^{s-2}_{loc}.$$

Considerando (2.1) abbiamo (usando il teorema di Hörmander):

$$u \in H^r_{ml}(x_0, \xi_0^1),\ f \in H^s_{loc} \Longrightarrow u \in H^{s+1}_{ml}(\Gamma_1)$$

e, allo stesso modo, $v \in H^{s+1}_{ml}(\Gamma_2)$.
Dalla proposizione segue

$$f, g \in H^s_{loc} \cap H^{s+1}_{ml}(\Gamma_1) \cap H^{s+1}_{ml}(\Gamma_2).$$

Usando il teorema di Hörmander su (2.2) e (2.3) si ha allora

$$u \in H^{s+2}_{ml}(\Gamma_1),\ v \in H^{s+2}_{ml}(\Gamma_2)$$

e per induzione finita (fino a che $s+k+1=r$ per un certo $k \in \mathrm{N}$) da

$$u \in H^s_{loc} \cap H^{s+k}_{ml}(x_0, \xi_0^1),\ v \in H^s_{loc} \cap H^{s+k}_{ml}(x_0, \xi_0^2)$$

segue

$$u \in H^s_{loc} \cap H^{s+k+1}_{ml}(\Gamma_1),\ v \in H^s_{loc} \cap H^{s+k+1}_{ml}(\Gamma_2).$$

Allora

$$u, v \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(\Gamma_1) \cap H^r_{ml}(\Gamma_2). \bullet$$

E' quindi non restrittivo, nello studio dei sistemi, supporre la stessa regolarita' Sobolev microlocale negli stessi punti di char(det(sistema)) per tutte le componenti della soluzione.

3.Sistemi di tipo Maxwell-Klein-Gordon. (P,[7]).

Def. *Sia (P) il sistema*

$$\begin{cases} \mathbf{P}(x,D)\mathbf{A} = \gamma(x,\phi,J^{m-1}\phi,J^{m-2}\mathbf{A}), \qquad x \in \mathbf{R}^n \\ P_m(x,D)\phi + \sum_{\mu=1}^{M} \rho^{\mu}(x,J^{m-2}\phi,J^{m-2}\mathbf{A})Q_{\mu}(x,D)\phi + f(x,J^{m-2}\phi,J^{m-2}\mathbf{A}) = 0 \end{cases}$$

dove:
(i) $\mathbf{P}(x,D)$ *e' un sistema* $N \times N$ *tale che* $Q_{Nm}(x,\xi)$ = *parte principale di* $\det\mathbf{P}(x,D)$ *e' di tipo* **reale principale** *(secondo Dencker) (i.e.* $Q_{Nm}(x,\xi)$ *e' reale,* $H_{Q_{Nm}}$ *non si annulla e non ha la direzione radiale quando* $Q_{Nm} = 0$*. Per tali sistemi vale ancora il teorema di Hörmander)* **oppure**

$$\mathbf{P}(x,D) = P_m(x,D)I_{N\times N} + \Big(Q_{(\mu\nu)}(x,D)\Big)_{\mu,\nu=1}^{N}$$

(ii) $P_m(x,D)$ *e' un operatore* **reale** *omogeneo di grado* m *a coefficienti* C^∞ *strettamente iperbolico di ordine* $m \geq 2$ *su* $\mathbf{R}^n$*;*

(iii) $Q_\mu(x,D)$ e $Q_{(\mu\nu)}(x,D)$ sono operatori a coefficienti C^∞ di ordine $m-1$;

(iv)char(P_m) $\subset$ char(Q_{Nm}) e se $\gamma_0 = (x_0,\xi_0) \in \mathbf{R}^{2n} \setminus 0$ e' tale che $P_m(\gamma_0) = 0$, allora Γ per γ_0 e' una bicaratteristica nulla per P_m e Q_{Nm} (se $\mathbf{P}$ e' diagonale si considera solo P_m);

(v) ρ^μ, f, $\gamma = (\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_{N-1})$ sono C^∞ e $(\mathbf{A},\phi) \in \mathbf{R}^{N+1}$.

Chiameremo (P) un sistema di tipo **Maxwell-Klein-Gordon** (P, [7]).

Un esempio, con $\mathbf{P}$ diagonale, di tale sistema e' il sistema di Maxwell-Klein-Gordon

$$(MKG) \qquad \begin{cases} F_{\mu\nu}{}^{;\nu} = \frac{i}{2}(\phi\partial_\mu\bar{\phi} - \bar{\phi}\partial_\mu\phi) + A_\mu|\phi|^2 \\ {}^*F_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 \\ (\partial^\mu + iA^\mu)(\partial_\mu + iA_\mu)\phi = 0 \end{cases}$$

dove pero' $(\mathbf{A}, \phi) \in \mathbf{C}^{N+1}$ (e quindi a patto di prendere delle precauzioni su Re$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1$, Im$\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, Re$\phi = \phi^1$, Im$\phi = \phi^2$).

Supponiamo $\gamma_0 \in T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$ e Γ siano come in (iv) e che $\mathbf{P}$ sia diagonale (seguendo P, [7]. Il metodo della prova si adatta infatti al caso generale). Si vuole prima di tutto provare un teorema lineare di propagazione delle singolarita' seguendo Beals-Reed ([3]) e utilizzando il Lemma di Rauch.

Theorem A.

i) $\frac{1}{2}n + m < s + m - 1 \leq r + m - 1 < 2(s + m - 1) - (\frac{1}{2}n + m - 1)$, $m \geq 2$,
ii)$\forall\mu$, $A_\mu, \phi \in H^{s+m-1}_{loc} \cap H^{r+m-1}_{ml}(\Gamma)$
iii)$\forall\mu$, $A_\mu, \phi \in H^{r+m-1+\varepsilon}_{ml}(\gamma_0)$, $0 \leq \varepsilon \leq min\{1, 2s - \frac{1}{2}n - r\}$,
iv)$(\mathbf{A}, \phi)$ soddisfa a (P).
Allora $A_\mu, \phi \in H^{r+m-1+\varepsilon}_{ml}(\Gamma)$, $\forall\mu = 0, 1, ..., N-1$.

Theorem B.

i)$\frac{1}{2}n < s \leq \frac{1}{2}n + 1$ e $0 \leq \varepsilon < s - \frac{1}{2}n$ (cosi' $\varepsilon < 1$), $m \geq 2$,
ii)$\forall\mu$, $A_\mu, \phi \in H^{s+m-1}_{loc}$,
iii)$\forall\mu$, $A_\mu, \phi \in H^{s+m-1+\varepsilon}_{ml}(\gamma_0)$,
iv)$(\mathbf{A}, \phi)$ soddisfa a (P).
Allora $A_\mu, \phi \in H^{s+m-1+\varepsilon}_{ml}(\Gamma)$, $\forall\mu = 0, 1, ..., N-1$.

Diamo cenni della prova di A nel caso $m = 2$:
Sia $\Lambda = (1 + |D|^2)^{\frac{1}{2}} \in \Psi^1_{1,0}$, allora

$$\Lambda P_2(x, D) = P_2(x, D)\Lambda + [\Lambda, P_2(x, D)] = P_2(x, D)\Lambda + ([\Lambda, P_2(x, D)]\Lambda^{-1})\Lambda,$$

$$\Lambda \sum_\mu \rho^\mu Q_\mu = \sum_\mu \Big(\rho^\mu Q_\mu(x, D)\Lambda + \rho^\mu[\Lambda, Q_\mu(x, D)] + [\Lambda, \rho^\mu]Q_\mu(x, D)\Big)$$

e per il Lemma di Rauch, $\Lambda f(x, \phi, \mathbf{A}) \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(\Gamma)$.
Il Commutator Lemma di Beals-Reed si puo' applicare: notando che

$$Q_\mu \phi \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(\Gamma), \; \rho^\mu \in H^{s+1}_{loc} \cap H^{r+1}_{ml}(\Gamma),$$

si ha $[\Lambda, \rho^\mu] Q_\mu \phi \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(\Gamma)$.

Allora $\Lambda\phi$ soddisfa a

$$P_2(x, D)\Lambda\phi + \Big([\Lambda, P_2(x, D)]\Lambda^{-1} + \sum_\mu \rho^\mu(x, \phi, \mathbf{A}) Q_\mu(x, D)\Big)\Lambda\phi +$$

$$+ (\sum_\mu \rho^\mu(x, \phi, \mathbf{A}) p_{0,\mu}(x, D))\Lambda\phi + \tilde{f} = 0$$

con

$$[\Lambda, P_2]\Lambda^{-1}, \; Q_\mu \in \Psi^1_{1,0}, \; \rho^\mu \in H^{s+1}_{loc} \cap H^{r+1}_{ml}(\Gamma)$$

$$p_{0.\mu}(x, D) \in \Psi^0_{1,0} \; \tilde{f} \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(\Gamma).$$

Tutto cio' usando il Lemma di Rauch. essendo $\frac{1}{2}n + 1 < s \leq r < 2s - \frac{1}{2}n$.
Poiche'

$$\Lambda\phi \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(\Gamma) \text{ e } \Lambda\phi \in H^{r+\varepsilon}_{ml}(\gamma_0),$$

allora $\Lambda\phi \in H^{r+\varepsilon}_{ml}(\Gamma)$ e quindi $\phi \in H^{s+1}_{loc} \cap H^{r+1+\varepsilon}_{ml}(\Gamma)$.
Questo grazie al teorema di propagazione di Beals-Reed (e' cruciale che i termini coefficienti dei pseudodifferenziali di ordine 1 siano in $H^{s+1}_{loc} \cap H^{r+1}_{ml}(\Gamma)$; quelli dei pseudodifferenziali di ordine 0 in $H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(\Gamma)$ e $\Lambda\phi \in H^s_{loc} \cap H^r_{ml}(\Gamma)$).

Si consideri ora la prima "equazione" in (P):
la regolarita' media degli argomenti di γ_μ e' $H^s_{loc} \cap H^{r+\varepsilon}_{ml}(\Gamma)$ (ricordiamo che $\varepsilon \leq min\{1, 2s - \frac{1}{2}n - r\}$) poiche' $A_\mu \in H^{s+1}_{loc} \cap H^{r+1}_{ml}(\Gamma))$ e $\Lambda\phi \in H^s_{loc} \cap H^{r+\varepsilon}_{ml}(\Gamma)$.
Poiche' $A_\mu \in H^{r+1+\varepsilon}_{ml}(\gamma_0)$ si ha. dal teorema di Hörmander, $A_\mu \in H^{r+1+\varepsilon}_{ml}(\Gamma)$. •

Notiamo che l'ipotesi (2) in B e' piu' debole di (2) in A. D'altra parte B da' un risultato piu' debole, piu' debole essendo la regolarita' extra a disposizione.

Avendo i teoremi A e B si puo' enunciare il teorema (di tipo Bony) di propagazione della regolarita':

Th C. *Sia* $\frac{1}{2}n+m-1<\sigma\leq\tau<2\sigma-(\frac{1}{2}n+m-1)$, $m\geq 2$ $A_\mu,\phi\in H^\sigma_{loc}\cap H^\tau_{ml}(\gamma_0)$, $\forall\mu$, *dove* $P_m(\gamma_0)=0$ *e* $(\mathbf{A},\phi)$ *sia solutione di* (P). *Se* Γ *e' una bicaratteristica nulla di* $P_m(x,D)$ *per* γ_0, *allora* $A_\mu,\phi\in H^\sigma_{loc}\cap H^\tau_{ml}(\Gamma)$, $\forall\mu=0,1,...,N-1$.

Diamo un'idea della prova nel caso $\frac{n}{2}+m<\sigma\leq\frac{n}{2}+m+1$ usando il teorema A (i casi $\frac{n}{2}+m+k<\sigma\leq\frac{n}{2}+m+k+1$ sono simili; il caso $\frac{n}{2}+m-1<\sigma\leq\frac{n}{2}+m$ viene trattato usando B).

Dim. Definendo $\varepsilon_1=min\{1,\tau-\sigma\}$ notiamo che

$$\varepsilon_1\leq min\{1,2\sigma-(\frac{1}{2}n+m-1)-\sigma\}=min\{1,\sigma-\frac{1}{2}n-m+1\}=$$

$$=min\{1,s-\frac{1}{2}n\}=min\{1,2s-\frac{1}{2}n-r\}$$

ponendo $\sigma=s+m-1$, $r=s$. Allora da A segue $A_\mu,\phi\in H^\sigma_{loc}\cap H^{\sigma+\varepsilon_1}_{ml}(\Gamma)$ ($\forall\mu$ chiaramente). Se $\tau-\sigma\leq 1$ abbiamo finito. Se $\tau-\sigma>1$ allora, per ipotesi, $A_\mu,\phi\in H^\sigma_{loc}\cap H^{\sigma+1+\varepsilon_2}_{ml}(\gamma_0)$ dove ora $\varepsilon_1=1$ e $0<\varepsilon_2=min\{1,\tau-(\sigma+1)\}$. Se $\sigma=s+m-1$, $r=s+1$ si ha ora $\varepsilon_2\leq min\{1,2s-\frac{1}{2}n-r\}$. Poiche'

$$\tau-(\sigma+1)<2\sigma-(\sigma+1)-(\frac{1}{2}n+m-1)=\sigma-(\frac{1}{2}n+m)\leq 1$$

allora $\varepsilon_2=\tau-(\sigma+1)$. Poiche' $\varepsilon_1=1$ allora

$$A_\mu,\phi\in H^\sigma_{loc}\cap H^{\sigma+1}_{ml}(\Gamma)$$

ed il teorema A permette di concludere quindi

$$A_\mu,\phi\in H^\sigma_{loc}\cap H^{\sigma+1+\varepsilon_2}_{ml}(\Gamma)=H^\sigma_{loc}\cap H^\tau_{ml}(\Gamma).\ \bullet$$

I dettagli di questo argomento di bootstrap si trovano comunque in (P, [7]).

Corollario . *Se* $\phi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$, $\varphi=\phi^1+i\phi^2$ *e se* A_μ, ϕ^i $(\mu=0,\ldots,n-1;\ i=1,2)$ *soddisfano alle ipotesi di A, B, C allora anche le rispettive conclusioni valgono.*

Infatti le ipotesi su ϕ^i, $i = 1,2$ fanno si' che il Lemma di Rauch sia valido per ϕ a valori complessi.

L'applicazione di C viene data a (MKG) :

riscriviamo il sistema (MKG) come

$$(MKGL) \qquad \begin{cases} \Box A_\mu = \gamma_\mu \quad , \mu = 0,1,2,3 \\ \Box\phi - 2iA^\mu\partial_\mu\phi + A^\mu A_\mu\phi = 0 \end{cases}$$

dove A_μ e' il potenziale tale che $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ (garantito da ${}^*F_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$, $n = 4$) e tale che $\partial^\mu A_\mu = 0$ (gauge di Lorentz).

Spezzando la prima equazione in $(MKGL)$ in parte reale ed immaginaria ($\Box$ e' un operatore reale) e considerando $\phi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ si vede che $(MKGL)$ e' nella forma (P) (supponendo che A^i_μ soddisfino alle ipotesi microlocali per garantire che i prodotti siano ben definiti).

Notiamo che se $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ e' tale che $\Box\varphi = 0$ e se $(\mathbf{A}, \phi)$ e' soluzione di $(MKGL)$, allora anche

$$T_\varphi: ((A_\mu), \phi) \longmapsto ((A_\mu + \partial_\mu\varphi), e^{-i\varphi}\phi)$$

e' soluzione.

(Notiamo che se $T_{\varphi,\mathbf{R}}$ e' la corrispondente trasformazione scritta tramite Re ed Im allora T_φ preserva $(MKGL)$ se e solo se $T_{\varphi,\mathbf{R}}$ preserva il corrispondente sistema scritto usando Re ed Im.)

Def. *T e' **accettabile** se, dati $A^i_\mu, \phi^i \in H^\sigma_{loc} \cap H^\tau_{ml}(\gamma)$, $i = 1,2$ allora $A'^i_\mu, \phi'^i \in H^\sigma_{loc} \cap H^\tau_{ml}(\gamma)$, $i = 1,2$ allora $(\mathbf{A}', \phi') = T(\mathbf{A}, \phi))$ dove $\gamma = (x_0, \xi_0)$ o Γ, bicaratteristica nulla per $\Box$.*

Allora si ha

Lemma. *Sia $A^i_\mu, \phi^i \in H^\sigma_{loc} \cap H^\tau_{ml}(\gamma)$, $i = 1,2$ e definiamo, per $(x_0, \xi_0) \in \gamma$,*

$$S = \{\varphi \in H^{\sigma+1}_{loc} \cap H^{\tau+1}_{ml}(x_0, \xi_0);\ \Box\varphi = 0,\ \varphi(x) \in \mathbf{R}\},$$

dove $\frac{1}{2}n < \sigma \leq \tau < 2\sigma - \frac{1}{2}n$. Allora T_φ e' accettabile $\forall \varphi \in S$.

Osservazione1. $A^i_\mu, \phi^i \in H^\sigma_{loc} \cap H^\tau_{ml}(x_0, \xi_0)$, $i = 1,2$ implica che

$$A_\mu, \phi \in H^\sigma_{loc} \cap H^\tau_{ml}(x_0, \xi_0) \text{ se e solo se } \bar{A}_\mu, \bar{\phi} \in H^\sigma_{loc} \cap H^\tau_{ml}(x_0, -\xi_0)$$

se e solo se

$$A^i_\mu, \phi^i \in H^\sigma_{loc} \cap H^\tau_{ml}(x_0, \xi_0) \cap H^\tau_{ml}(x_0, -\xi_0)\,, \; i = 1, 2.$$

Percio' le conclusioni del lemma sono vere per $\gamma_0^\pm = (x_0, \pm\xi_0)$ e Γ

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}_\pm = \{\varphi \in H^{\sigma+1}_{loc} \cap H^{\tau+1}_{ml}(x_0, \xi_0) \cap H^{\tau+1}_{ml}(x_0, -\xi_0);\; \Box\varphi = 0,\; \varphi(x) \in \mathbf{R}\} = \mathcal{S}.$$

Osservazione2. Se

$$\gamma_\mu = \frac{i}{2}(\phi\partial_\mu\bar\phi - \bar\phi\partial_\mu\phi) + \frac{1}{2}(A_\mu + \bar A_\mu)|\phi|^2$$

allora

$$A_\mu(x) = \xi_\mu(e^{i<x,\xi>} - e^{-i<x,\xi>}), \quad \phi(x) = ze^{i<x,\xi>} + we^{-i<x,\xi>}$$

dove $\xi^\mu\xi_\mu = 0,\; |z|^2 = |w|^2;\; z, w \in \mathbf{C},\; \xi \in \mathbf{R}^n$ e' soluzione di $(MKGL)$.

Si ha allora dal teorema C:

Th. *Se* $(\mathbf{A}, \phi)$ *e' soluzione di* $(MKGL)$ *tale che, per* $i = 1, 2$, $A^i_\mu, \phi^i \in H^\sigma_{loc} \cap H^\tau_{ml}(\gamma_0)$, *dove* $\frac{1}{2}n + 1 < \sigma \le \tau < 2\sigma - (\frac{1}{2}n + 1)$, *allora*

$$A_\mu, \phi \in H^\sigma_{loc} \cap H^\tau_{ml}(\Gamma_+) \cap H^\tau_{ml}(\Gamma_-)$$

e

$$T_\varphi(\mathbf{A}, \phi) \in H^\sigma_{loc} \cap H^\tau_{ml}(\Gamma_+) \cap H^\tau_{ml}(\Gamma_-),\; \forall\varphi \in \mathcal{S}.$$

Un teorema analogo al precedente e' anche valido per sistemi di tipo Yang-Mills-Klein-Gordon su un fibrato principale con gruppo di struttura G (il caso $G = U(1)$ e' il caso Maxwell-Klein-Gordon).

References.

[1] **M.Beals.** *Spreading of singularities for a semilinear wave equation. Duke Math.J., 49 (1982).*

[2] **M.Beals.** *Self-spreading and strength of singularities for solutions to semilinear wave equations. Ann.of Math. (2) 118 (1983).*

[3] **M.Beals, M.Reed.** *Propagation of singularities for hyperbolic pseudodifferential operators and applications to nonlinear problems, Comm.Pure Appl. Math 35 (1982).*

[4] **J.M.Bony.** *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non lineaires, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 14 (1981).*

[5] **L.Hörmander.** *Non-linear hyperbolic differential equations. Lectures 1986-1987, Dept. of Math., University of Lund.*

[6] **B.Lascar.** *Singularités des solutions d'equations aux derivées partielles nonlinéaires. C.R.Acad.Sci.Paris 287 (1978).*

[7] **A.Parmeggiani.** *On the propagation of smoothness for semilinear systems of Maxwell-Klein-Gordon type. (Preprint. In corso di stampa sugli Annali di Mat.Pura e Appl.).*

[8] **J.Rauch.** *Singularities of solutions to semilinear wave equations, J.Math.Pures et Appl. 58 (1979).*

[9] **J.Rauch, M.Reed.** *Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension. Duke Math.J.,49 (1982).*